Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for datateknikk og informasjonsvitenskap (IDI)

Løsningsforslag øving 9

I denne øvingen prøver vi ut rekker i Matlab. Vi lager en funksjon for å regne ut alternerende rekker og funksjoner for å regne ut fakultet og binomialkoeffisient som gjennomgått i Matematikk 1. H-W-T m.n.o er nummeret på en oppgave i *Hass-Weir-Thomas, University Calculus*.

Det er ikke nødvendig å ha en kopi av læreboka i Matematikk 1 for å løse dette oppgavesettet.

1 Lag en funksjon for å beregne fakultetsfunksjonen, $n! = 1{\cdot}2{\cdot}, 3\ldots, {\cdot}n, 0! = 1$. Kall funksjonen `faculty` og sjekk at den regner riktig ved å kontrollere at $0! = 1$, $1! = 1$ og $10! = 3628800$ blir regnet ut korrekt. Du trenger ikke å legge inn noen sjekk på at den ikke blir kalt med verdier $n < 0$.

Løsning:

```
function nfac = faculty(n)
  nfac = 1;

  for i = 2:n
    nfac = i*nfac;
  end
end
```

2 En alternerende rekke (alternating series)[1] kan skrives på formen

$$S_k = \sum_{n=0}^{n=k} u_n = u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + \ldots, \tag{1}$$

hvor $u_n = u(n)$ er en funksjon av summasjonsindeksen n. Anta at (1) er konvergent[2] med monotont avtagende[3] ledd, og at S er verdien vi får ved å ta med uendelig mange ledd k, $k \to \infty$. Fra matematikken vet vi da at feilen vi får ved å avslutte utregningen etter k ledd er mindre enn eller lik u_{k+1}, altså verdien av det første utelatte leddet.

[1] En alternerende rekke er en sum hvor annethvert ledd er positivt og negativt

[2] At en rekke er konvergent betyr at jo flere ledd du tar med, jo nærmere kommer du en bestemt, endelig verdi.

[3] At noe er monotont avtagende betyr at verdien bare blir mindre og mindre, uten unntak. Dette er nødvendig for at vi skal kunne vite noe om størrelsen på feilen ved avslutning av summen.

a) Skriv funksjonen `aseries(u,nmax,errmax)`, hvor parameteren $u = u(n)$ er peker til en funksjon u av summasjonsindeksen n. Repeter pekere til funksjoner på Matlab-wikien (http://mediawiki.idi.ntnu.no/fag/tdt4105) hvis du ikke husker hvordan vi lagrer funksjoner som variable i Matlab. Antallet ledd som skal være med i summen er angitt *indirekte*. Det skal være med minimum så mange ledd k at feilen $|S - S_k| <$ `errmax`, men ikke flere ledd enn et angitt *maksimalt antall ledd* `nmax`. Det er ikke nødvendig å sjekke at brukeren gir inn verdier $u(n) > 0$ og `nmax` > 0.

Løsning:

```
function asum = aseries(u, nmax, errmax)
  asum = 0;
  sign = 1;

  for n = 0:nmax-1
    un = u(n);
    asum = asum + sign*un;
    sign = -sign;

    if (un < errmax)
      return;
    end
  end
end
```

Selv om `sign` er mest effektivt er det greit at folk bruker `(-1)^n`. Merk at maksimalt antall ledd betyr at siste ledd som skal være med er $k =$ `nmax` $- 1$. Funksjonen kan også skrives med `while`, men det blir litt vanskeligere fordi man må sette inn verdier slik at while-løkka entres første gang, samt at `n` og `un` oppdateres riktig.

b) H-W-T 8.6.50: Regn ut rekken

$$e^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!} = 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \dots$$

med en feil mindre enn $5 \cdot 10^{-6}$ ved å bruke `aseries`. Kontroller at feilen ikke blir for stor. Du må ta minumum med så mange ledd at $n! > \frac{1}{5} \cdot 10^6 = 200\,000$.

Løsning:

```
>> u = @(x) 1./faculty(n);
>> exp(-1) - aseries(u, intmax, 5e-6)
ans = 2.5246e-07
```

Istedet for `nmax = intmax` kan en vilkårlig verdi `nmax` ≥ 10 benyttes.

3 Binomialkoeffisienten brukes ofte i rekkeutviklinger og i kombinatorikk. Den er definert ved formelen

$$\binom{r}{k} = \frac{r(r-1)(r-2)\cdots(r-k+1)}{k(k-1)\cdots 1}, \tag{2}$$

med verdi 0 hvis $k < 0$ og 1 for $k = 0$.

a) Skriv funksjonen `binom(r,k)` som regner ut binomialkoeffisienten etter (2). Anta k er et heltall og at r kan være et vilkårlig positivt eller negativt desimaltall.[4] **Løsning:**

```
function bc = binom(r,k)
  if (k < 0)
    bc = 0;
    return;
  elseif (k == 0)
    bc = 1;
    return;
  end

  if (r < r+1-k)
    step = 1;
  else
    step = -1;
  end

  bc = fac = 1;
  for s = r:step:r+1-k
    bc = bc * s;
  end
  for i = 2:k
    fac = fac * i;
  end
  bc = bc / fac;
end
```

b) Verifiser at `binom` regner riktig ved å sjekke utregningene

$$\binom{7}{3} = 35, \binom{r}{0} = 1, \binom{r}{2} = \frac{1}{2}r(r-1), \binom{-1}{k} = (-1)^k, \binom{k}{k} = 1.$$

[4] Dette betyr at det finnes tilfeller hvor $r < r - k + 1$, som du må ta hensyn til.